Γεωμετρία Β' Λυκείου

Ύλη για το διαγώνισμα Α τετραμήνου

7.4 Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα - Αναλογίες

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \alpha\delta=\beta\gamma$, $\quad\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}\Leftrightarrow \beta^2=\alpha\gamma$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\frac{\alpha\pm\beta}{\beta}=\frac{\gamma\pm\delta}{\delta}$, $\quad\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\alpha\pm\beta}=\frac{\gamma}{\gamma\pm\delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\ldots=\frac{\kappa}{\lambda}=\frac{\alpha+\gamma+\ldots+\kappa}{\beta+\delta+\ldots+\lambda}$

7.7 Θεώρημα του Θαλή

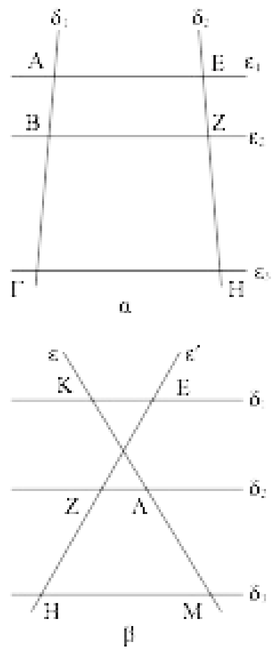
ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες τέμνουν δυο άλλες ευθείες, ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα.

Δηλαδή:

Αν $\varepsilon_1//\varepsilon_2//\varepsilon_3$, τότε $\frac{AB}{EZ}=\frac{B\Gamma}{ZH}=\frac{A\Gamma}{EH}$ (σχ.8α).

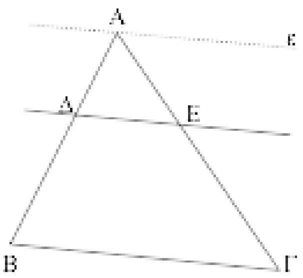
Αν $\delta_1//\delta_2//\delta_3$, τότε $\frac{K\Lambda}{EZ}=\frac{\Lambda M}{ZH}=\frac{KM}{EH}$ (σχ.8β).



Σχήμα 8

ΘΕΩΡΗΜΑ

Θεωρούμε δύο ευθείες δ_1 και δ_2 που τέμνουν δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 στα σημεία Α, Β και Ε, Ζ αντίστοιχα. Αν Γ και Η είναι σημεία των ευθειών δ_1 και δ_2 αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{EZ}{ZH}$, τότε η ευθεία ΓΗ είναι παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2 (σχ.9).



ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα και αντίστροφα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.

8.2 Κριτήρια ομοιότητας

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι (1ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

i) Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια, όταν έχουν μία οξεία γωνία τους ίση.

ii) Όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους.

iii) Δύο ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία έχουν μία αντίστοιχη γωνία ίση, είναι όμοια.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ (2ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ (3ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

i) Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων υψών τους.

ii) Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων διχοτόμων τους.

iii) Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων διαμέσων τους.

9.2 Το Πυθαγόρειο θεώρημα

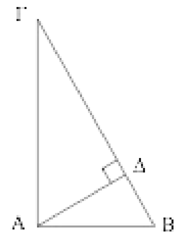
ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

(1) **ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Έστω λοιπόν ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και Δ η προβολή της κορυφής Α στην υποτείνουσα ΒΓ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\mathbf{AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta}$ **και** $\mathbf{A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta}$.

Για την πρώτη σχέση αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{B\Gamma}{AB}$, δηλαδή ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΑ είναι όμοια, το οποίο ισχύει αφού $\hat{A} = \hat{\Delta} = 1\llcorner$ και η $\hat{B}$ είναι κοινή. Όμοια αποδεικνύεται και η σχέση $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.



Σχήμα 2

Διαιρώντας τις $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ και $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$ κατά μέλη προκύπτει το εξής πόρισμα:

ΠΟΡΙΣΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ (Πυθαγόρειο)

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

(2) **ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Θέλουμε δηλαδή (σχ.2) να αποδείξουμε ότι

$$\mathbf{AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2} \text{ ή } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα έχουμε:

$$AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta \quad \text{και} \quad A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta.$$

Με πρόσθεση των ισοτήτων κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot B\Delta + B\Gamma \cdot \Gamma\Delta =$$

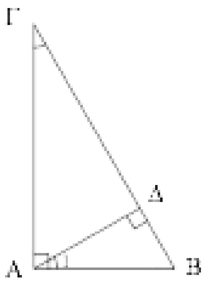
$$B\Gamma(B\Delta + \Gamma\Delta) = B\Gamma \cdot B\Gamma = B\Gamma^2.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ (Αντίστροφο του Πυθαγορείου)

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$, τότε $\hat{A} = 1\llcorner$.

ΘΕΩΡΗΜΑ IV

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.



Σχήμα 4

(3) **ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Έστω ΑΔ το ύψος του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ (σχ.4), που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Θα αποδείξουμε ότι

$$\mathbf{A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma}$$

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΑΔ είναι όμοια, αφού είναι ορθογώνια και $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ ως συμπληρωματικές της $\hat{B}$. Επομένως, οι πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή $\dfrac{A\Delta}{B\Delta} = \dfrac{\Delta\Gamma}{A\Delta}$, οπότε $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$.

9.4 Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Αν δηλαδή σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.10) είναι π.χ. $\hat{A} < 1\llcorner$ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, τότε ισχύει ότι

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Αν δηλαδή σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.11) είναι π.χ. $\hat{A} > 1\llcorner$ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, τότε ισχύει

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι ισοδυναμίες:

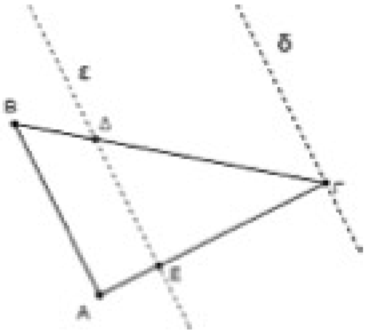
i) $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} > 1\llcorner$,

ii) $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} = 1\llcorner$,

iii) $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} < 1\llcorner$.

Ασκήσεις για το διαγώνισμα

22248.Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 9, ΓΑ = 12 και ΓΒ = 15 και ευθείες ε, δ παράλληλες στην ΑΒ, όπως αυτές του σχήματος.



α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να βρείτε ποια πλευρά είναι η υποτείνουσά του. **(Μονάδες 8)**

β) Αν η ευθεία (ε) τέμνει τις πλευρές ΓΑ, ΓΒ σε σημεία Ε και Δ αντίστοιχα έτσι ώστε ΕΑ = 4 και η ευθεία (δ) διέρχεται από το σημείο Γ, τότε να υπολογίσετε

i. το τμήμα ΔΒ, **(Μονάδες 8)**

ii. τις πλευρές του τριγώνου ΔΕΓ. **(Μονάδες 9)**

Λύση

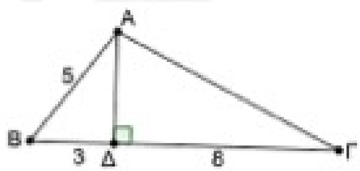
α) Είναι $AB^2 + A\Gamma^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2 = B\Gamma^2$ οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$ και υποτείνουσα την πλευρά ΓΒ.

β) i. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή για τις παράλληλες ε, δ και ΑΒ που τέμνουν τις ΓΑ και ΓΒ ισχύει η αναλογία $\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma E} = \frac{\Delta B}{EA} = \frac{\Gamma B}{\Gamma A} \Leftrightarrow \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma E} = \frac{\Delta B}{4} = \frac{15}{12} \Rightarrow \frac{\Delta B}{4} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \Delta B = 5$

ii. Είναι ΓΔ = ΓΒ – ΔΒ = 15 – 5 = 10 και ΓΕ = ΓΑ – ΕΑ = 12 – 4 = 8.

Το τρίγωνο ΔΕΓ ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΓΑ και ΓΒ του τριγώνου ΑΒΓ και την ευθεία ε που είναι παράλληλη στην πλευρά του ΑΒ, οπότε έχει πλευρές ανάλογες στις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδή ισχύει $\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma B} = \frac{\Gamma E}{\Gamma A} = \frac{E\Delta}{AB} \Leftrightarrow \frac{10}{15} = \frac{8}{12} = \frac{E\Delta}{9} \Rightarrow \frac{E\Delta}{9} = \frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{15}_{3}} \Leftrightarrow 3E\Delta = 18 \Leftrightarrow E\Delta = 6$

21302.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 5 και ΑΔ το ύψος του από την κορυφή Α. Αν ΒΔ = 3 και ΓΔ = 8 να αποδείξετε ότι:



α) ΑΔ = 4. **(Μονάδες 07)**

β) $A\Gamma = \sqrt{80}$. **(Μονάδες 08)**

γ) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε:
$A\Delta^2 = AB^2 - B\Delta^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow A\Delta = 4$

β) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:
$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 = 4^2 + 8 = 16 + 64 = 80 \Leftrightarrow A\Gamma = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

γ) Είναι $B\Gamma^2 = (3+8)^2 = 11^2 = 121$ και $AB^2 + A\Gamma^2 = 5^2 + \left(\sqrt{80}\right)^2 = 25 + 80 = 105$.

Είναι $B\Gamma^2 > AB^2 + A\Gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 90^\circ$ επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

17354. Στα παρακάτω τρίγωνο ΔΕΖ φέρουμε τα ύψη του ΔΚ και ΖΙ.

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i. Η προβολή της πλευράς ΔΕ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα …….

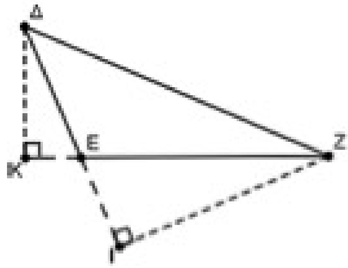
ii. Η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα …….

iii. Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς …….. στην πλευρά …….

iv. Το τμήμα ΕΙ είναι η προβολή της πλευράς ………
στην πλευρά ……..

v. $\Delta Z^2 = \Delta E^2 + ... + 2EZ \cdot ...$

vi. $EZ^2 = ... + \Delta Z^2 - 2... \cdot \Delta I$ **(Μονάδες 15)**



β) Αν ΔΕ = 2, ΕΖ = 4 και ΔΖ = 5, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΙ. (Μονάδες 10)

Λύση

α) **i.** Η προβολή της πλευράς ΔΕ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα ΚΕ .

ii. Η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα ΚΖ .

iii. Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΔΕ.

iv. Το τμήμα ΕΙ είναι η προβολή της πλευράς ΕΖ στην πλευρά ΔΕ .

v. $\Delta Z^2 = \Delta E^2 + EZ^2 + 2EZ \cdot KE$

vi. $EZ^2 = \Delta E^2 + \Delta Z^2 - 2\Delta E \cdot \Delta I$

β) Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΔΕ, οπότε εφαρμόζοντας Γενικευμένο Πυθαγόρειο για την πλευρά ΕΖ έχουμε:

$$EZ^2 = \Delta E^2 + \Delta Z^2 - 2\Delta E \cdot \Delta I \Leftrightarrow 4^2 = 2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot \Delta I \Leftrightarrow 16 = 29 - 4\Delta I \Leftrightarrow 4\Delta I = 13 \Leftrightarrow \Delta I = \frac{13}{4}$$

16804. Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη του ΑΗ και ΒΘ. α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i. Η προβολή την πλευράς ΒΓ στην πλευρά ΑΓ είναι το τμήμα …….

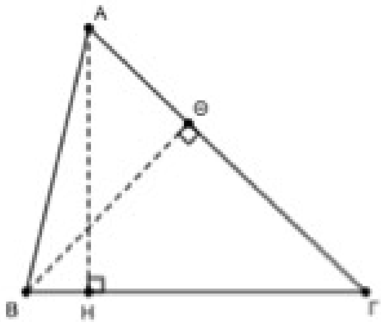
ii. Η προβολή τη πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΒΓ είναι το τμήμα ......

iii. Το τμήμα ΗΓ είναι η προβολή της πλευράς ……..
στην πλευρά …….

iv. Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς ……… στην
πλευρά ……..

v. $A\Gamma^2 = AB^2 + ... - 2B\Gamma \cdot ...$

vi. $B\Gamma^2 = ... + A\Gamma^2 - 2... \cdot A\Theta$



(Μονάδες 15)

β) Αν ΑΒ = 4, ΒΓ=5 και ΑΓ = 6, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΘ. (Μονάδες 10)

Λύση

α) **i.** Η προβολή της πλευράς ΒΓ στην πλευρά ΑΓ είναι το τμήμα ΘΓ

ii. Η προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΒΓ είναι το τμήμα ΒΗ

iii. Το τμήμα ΗΓ είναι η προβολή της πλευράς ΑΓ στην πλευρά ΒΓ

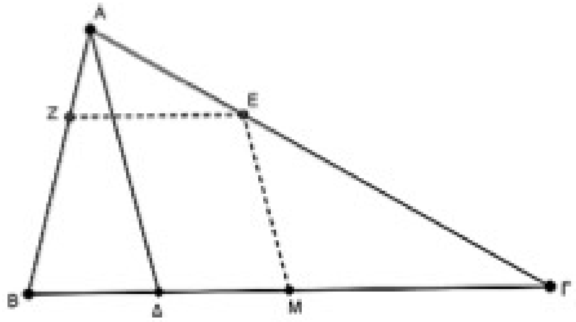
iv. Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΑΓ

v. $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma 2 - 2B\Gamma \cdot BH$ **vi.** $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2A\Gamma \cdot A\Theta$

β) Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς ΑΒ στην ΑΓ, οπότε εφαρμόζοντας Γενικευμένο Πυθαγόρειο για την πλευρά ΒΓ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2A\Gamma \cdot A\Theta \Leftrightarrow 25 = 16 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot A\Theta \Leftrightarrow 12A\Theta = 27 \Leftrightarrow A\Theta = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}.$$

15831.Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος, το Μ είναι μέσο της πλευράς ΒΓ και το Δ είναι το μέσο του ΜΒ. Από το Μ φέρνουμε παράλληλη στην ΑΔ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στην ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:



α) $\dfrac{ΕΑ}{ΕΓ}=\dfrac{1}{2}$ **(Μονάδες 15)**

β) $\dfrac{ΖΑ}{ΖΒ}=\dfrac{1}{2}$ **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Από τα δεδομένα, το Δ να είναι το μέσο του ΒΜ και το Μ μέσο της ΒΓ. Άρα $ΜΔ=\dfrac{1}{2}ΜΒ=\dfrac{1}{2}ΜΓ$.

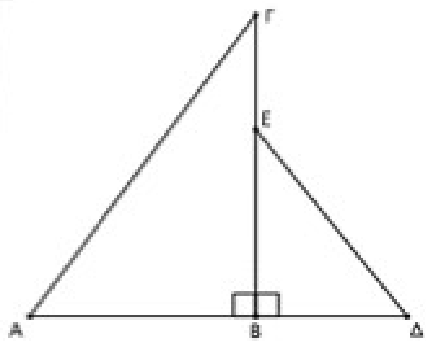
Επίσης η ΜΕ // ΑΔ, οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι: $\dfrac{ΕΑ}{ΕΓ}=\dfrac{ΜΔ}{ΜΓ}=\dfrac{\frac{1}{2}ΜΓ}{ΜΓ}=\dfrac{1}{2}$.

β) Από τα δεδομένα η ΖΕ // ΒΓ, οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι: $\dfrac{ΖΑ}{ΖΒ}=\dfrac{ΕΑ}{ΕΓ}=\dfrac{1}{2}$.

16099.Στο διπλανό σχήμα δίνονται $Α=Δ$, $ΑΓ=36$, $ΒΔ=16$ και $ΕΔ=24$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι όμοια.
(Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΒ.
(Μονάδες 10)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ έχουν:

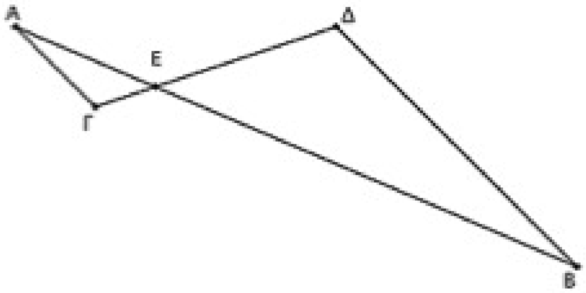
- $Α=Δ$ (υπόθεση)
- $ΑΒΓ=ΕΒΔ=90$

Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.

Άρα $\dfrac{ΑΓ}{ΕΔ}=\dfrac{ΑΒ}{ΒΔ}\Leftrightarrow\dfrac{\cancel{36}^{\,6}}{\cancel{24}_{\,6}}=\dfrac{ΑΒ}{16}\Leftrightarrow 6ΑΒ=144\Leftrightarrow ΑΒ=\dfrac{144}{6}=24$

16100. **Στο διπλανό σχήμα δίνονται ότι ΑΕ = 5, ΑΓ = 4, ΕΓ = 2, ΔΕ = 6, ΒΕ = 15 και ΒΔ = 12.**



α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{ΒΔ}{ΑΓ}, \frac{ΔΕ}{ΕΓ}, \frac{ΒΕ}{ΑΕ}$. **(Μονάδες 9)**

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια. **(Μονάδες 8)**

γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΕΓ και ΒΕΔ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας .

Α = ..., Γ = ... , ΑΕΓ = ... **(Μονάδες 8)**

Λύση

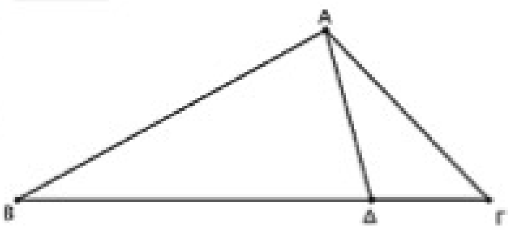
α) $\frac{ΒΔ}{ΑΓ} = \frac{12}{4} = 3$, $\frac{ΔΕ}{ΕΓ} = \frac{6}{2} = 3$, $\frac{ΒΕ}{ΑΕ} = \frac{15}{5} = 3$.

β) Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια διότι έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία.

γ) Αφού τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια, τότε θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές τους. Επομένως, έχουμε:

- Α = Β αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΕΓ και ΔΕ αντίστοιχα
- Γ = Δ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΑΕ και ΒΕ αντίστοιχα
- ΑΕΓ = ΒΕΔ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα.

16755. **Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 2ΑΓ και σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ τέτοιο ώστε ΑΓ = 2ΓΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα.**



α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{ΒΓ}{ΑΓ}$ και $\frac{ΑΓ}{ΓΔ}$. **(Μονάδες 8)**

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια. **(Μονάδες 9)**

γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΑΓ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΒΑΓ = ..., Β = ... **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) $\frac{ΒΓ}{ΑΓ} = \frac{2ΑΓ}{ΑΓ} = 2$ και $\frac{ΑΓ}{ΓΔ} = \frac{2ΓΔ}{ΓΔ} = 2$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ έχουν:

- Γ κοινή και
- $\frac{ΒΓ}{ΑΓ} = \frac{ΑΓ}{ΓΔ} = 2$

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια, αφού έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.

γ) Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια, τότε θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές τους. Επομένως, έχουμε:

ΒΑΓ = ΓΔΑ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα και

Β = ΔΑΓ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΑΓ και ΓΔ αντίστοιχα.

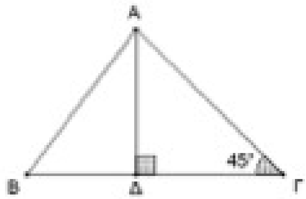
17342.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 7, $\hat{Γ} = 45^\circ$ και ύψος ΑΔ = 4.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΓΔ = 4. **(Μονάδες 5)**

ii. $ΑΓ = 4\sqrt{2}$. **(Μονάδες 8)**

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΒ. **(Μονάδες 12)**



Λύση

α) Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχει $\hat{Γ} = 45^\circ$, οπότε από το άθροισμα των γωνιών του έχουμε:
$Α\hat{Γ}Δ + 45^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow Α\hat{Γ}Δ = 45^\circ$, επομένως το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ και είναι ΓΔ = ΑΔ = 4.

β) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, είναι:
$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2 = 4^2 + 4^2 = 2 \cdot 4^2 \Leftrightarrow ΑΓ = 4\sqrt{2}$

γ) Είναι $ΒΔ = ΒΓ - ΔΓ = 7 - 4 = 3$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ, είναι:
$ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΔΒ^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Leftrightarrow ΑΒ = 5$

16133.Στο διπλανό σχήμα, τα ευθύγραμμα τμήματα και έχουν μήκη αντίστοιχα και , οι γωνίες και είναι ορθές και τα σημεία και ανήκουν στην ίδια ευθεία.

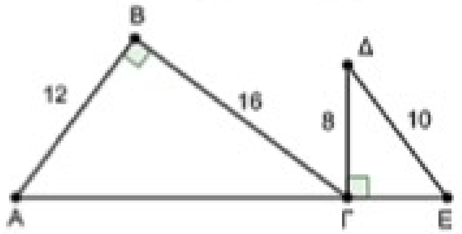
α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΕ. **(Μονάδες 7)**

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ είναι όμοια. **(Μονάδες 7)**

γ) Έστω ότι το σημείο τομής των ευθειών ΑΒ και ΕΔ είναι το Ζ και ΖΗ είναι το ύψος του τριγώνου ΖΑΕ από την κορυφή του . Να αποδείξετε ότι:

i. ΕΗ = 13, **(Μονάδες 6)**

ii. $ΖΗ = \dfrac{52}{3}$ **(Μονάδες 5)**

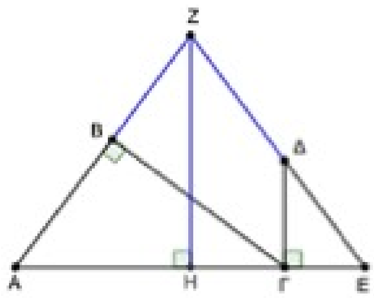


Λύση

α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:
$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 \Leftrightarrow ΑΓ = 20$
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΕ έχουμε:
$ΓΕ^2 = ΔΕ^2 - ΔΓ^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \Leftrightarrow ΓΕ = 6$
Είναι $ΑΕ = ΑΓ + ΓΕ = 20 + 6 = 26$

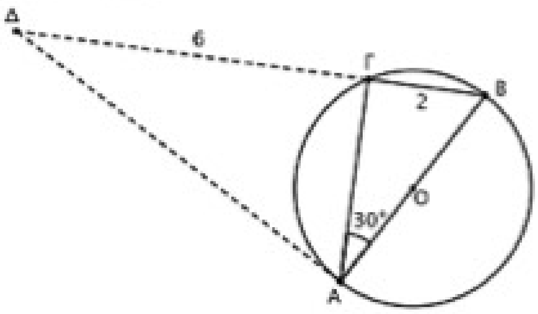
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΓΕ έχουν:
$\dfrac{ΑΒ}{ΓΕ} = \dfrac{12}{6} = 2$, $\dfrac{ΒΓ}{ΓΔ} = \dfrac{16}{8} = 2$, $\dfrac{ΑΓ}{ΔΕ} = \dfrac{20}{10} = 2$, δηλαδή $\dfrac{ΑΒ}{ΓΕ} = \dfrac{ΒΓ}{ΓΔ} = \dfrac{ΑΓ}{ΔΕ} = 2$, οπότε είναι όμοια, αφού έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία.

γ) i) Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ είναι όμοια, θα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, άρα $\hat{Α} = \hat{Ε}$, οπότε το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΕ.
Επειδή το ΖΗ είναι ύψος θα είναι και διάμεσος οπότε το σημείο Η είναι το μέσο της ΑΕ. Επομένως θα είναι $ΗΕ = \dfrac{ΑΕ}{2} = \dfrac{26}{2} = 13$.



ii) Είναι ΔΓ//ΖΗ γιατί και οι δύο είναι κάθετες στην ΑΕ, οπότε από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ΓΔΕ θα έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΗΖΕ, δηλαδή:
$\dfrac{ΔΓ}{ΖΗ} = \dfrac{ΓΕ}{ΗΕ} \Leftrightarrow \dfrac{8}{ΖΗ} = \dfrac{6}{13} \Leftrightarrow 6ΖΗ = 104 \Leftrightarrow ΖΗ = \dfrac{104}{6} = \dfrac{52}{3}$

21149. **Σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας R θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε $\hat{ΒΑΓ} = 30^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.**



Αν ΒΓ = 2, τότε:

α) Να υπολογίσετε:

i. Την ακτίνα R.

ii. Το μήκος της πλευράς ΑΓ. **(Μονάδες 16)**

β) Θεωρούμε σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ τέτοιο ώστε ΓΔ = 6. Να εξετάσετε αν το τμήμα ΔΑ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Α. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) **i.** Η γωνία ΒΓΑ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο ημικύκλιο ΑΒ, οπότε είναι ορθή. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{ΒΑΓ} = 30^\circ$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΑΒ, δηλαδή $ΒΓ = \frac{ΑΒ}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{2R}{2} \Leftrightarrow R = 2$.

ii. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 - ΒΓ^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12 \Leftrightarrow ΑΓ = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε:

$ΑΔ^2 = ΑΓ^2 + ΔΓ^2 = 12 + 6^2 = 48 \Leftrightarrow ΑΔ = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

Στη συνέχεια, εξετάζουμε αν εφαρμόζεται το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΒΔ. Είναι $ΔΒ^2 = 8^2 = 64$ και $ΑΒ^2 + ΑΔ^2 = 4^2 + 48 = 64$.

Επειδή $ΔΒ^2 = ΑΒ^2 + ΑΔ^2$ το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο με $\hat{ΒΑΔ} = 90^\circ$, επομένως το τμήμα ΔΑ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Α.